Αξιώματα Αριθμησιμότητας

Ορισμός: Ο τ.χ $(E, \mathcal{T})$ $2^{ης}$ αριθμησιμότητας $\Leftrightarrow$ $\exists$ τ.π.α βάση της $\mathcal{T}$ και το συμβολίζουμε ως C_2

Πρόταση: Κάθε χώρος $2^{ης}$ αριθμησιμότητας είναι και $1^{ης}$ αριθμησιμότητας

Απόδειξη

$\mathcal{B}$ τ.π.α βάση της $\mathcal{T}$. Έστω, επίσης $p \in E$

και $\mathcal{B}_p = \{B \in \mathcal{B} : p \in B\} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_p$ είναι βάση του $\mathcal{N}_p$

Άρα, η $\mathcal{B}_p$ τ.π.α

Πχ. (Γνήσιο υποσύνολο, δηλ. $e_2 \subset e_1$)

Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ διακριτός

και έστω τυχόν $p \in \mathbb{R}$

Θεωρώντας, $\mathcal{B} = \{\{p\}\}$ βάση του N_p και μάλιστα τπα

Έτσι ο $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ είναι e_1

Είναι e_2;

Αν $\mathcal{B}$ βάση της $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ διακριτής

Τότε η $\mathcal{B}$ περιέχει τα μονοσύνολα δηλ. υπεραριθμήσιμη

Επομένως, $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ δεν είναι e_2

ΠΡΟΤΑΣΗ / ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

Έστω $(E, \mathcal{T})$ τ.χ $1^{ης}$ (αντίστοιχα $2^{ης}$) αριθμησιμότητας και $S \subseteq E$ με $S \neq \emptyset$. Τότε ο τ.χ $(S, \mathcal{T}_S)$ είναι $1^{ης}$ (αντίστοιχα $2^{ης}$) αριθμησιμότητας

($\mathcal{T}_S = \{S \cap X : X \in \mathcal{T}\}$ ← τοπολογία)

Απόδειξη:

Έστω $(E, \mathcal{T})$ $2^{ης}$ αριθμησιμότητας. Τότε, υπάρχει τπα βάση $\mathcal{B}$ της $\mathcal{T}$. Τότε προφανές ότι $\mathcal{B}_S = \{B \cap S : B \in \mathcal{B}\}$ είναι βάση της $\mathcal{T}_S$ και μάλιστα τ.π.α

Έστω $(E, \mathcal{T})$ $1^{ης}$ αριθμησιμότητας και $p \in S \subseteq E$. Τότε $\exists$ τπα βάση $\mathcal{B}$ του N_p (ως προς την $\mathcal{T}$)

Τότε η $\mathcal{B}^S = \{S \cap X : X \in N_p\}$ τπα βάση του N_p^S (ως προς την $\mathcal{T}_S$). Η συνέχεια πραγματοποιείται με τη βοήθεια ενός λήμματος

ΛΗΜΜΑ / ΠΡΟΤΑΣΗ:

Έστω $S \subseteq E$, $S \neq \emptyset$ και $p \in S$. Τότε:

$N_p^S = \{S \cap V : V \in N_p\}$

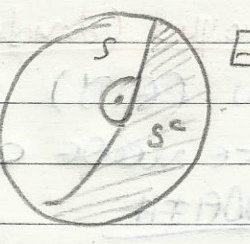
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $V \in N_p \Rightarrow p \in A \subseteq V$, $A \in \mathcal{T}$

τότε το $p \in \underbrace{S \cap A}_{\in \mathcal{T}_S} \subseteq S \cap V$. Άρα, $S \cap V \in N_p^S$

Άρα, $\{S \cap V : V \in N_p\} \subseteq N_p^S$

Από, την άλλη μεριά



ας είναι $U \in \mathcal{N}_p^S$ και έστω $V = U \cap S^c$

Θδο $V \in \mathcal{N}_p^S$

Παρατηρώ ότι $S \cap V = S \cap (U \cap S^c) =$

$= (S \cap U) \cup (S \cap S^c) = S \cap U$ (1)

Αφού $U \in \mathcal{N}_p^S$ τότε $U \subseteq S$ άρα η (1): $S \cap V = U$

Ισχύει: $p \in U \subseteq U \cup S^c = V \Rightarrow p \in V$

Ακόμη, αφού $U \in \mathcal{N}_p^S \Rightarrow (\exists A \in \mathcal{T}): p \in \overbrace{S \cap A}^{\text{ενός ανοιχτού συνόλου εν } S} \subseteq U \Rightarrow$

$\Rightarrow S^c \cap (S \cap A) \subseteq S^c \cup U = V$

$S^c \cup (S \cap A) = (S^c \cup S) \cap (S^c \cup A) = S^c \cup A$

Δηλαδή, $S^c \cap A \subseteq V \xRightarrow{p \in A} p \in A \subseteq V,\ A \in \mathcal{T} \Rightarrow V \in \mathcal{N}_p$

Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος $(E, \mathcal{T})$ καλείται διαχωρίσιμος αν έχει ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο (συμβολ. $\mathfrak{S}$)

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν ο τ.χ. $(E, \mathcal{T})$ είναι $2^{ης}$ αριθμησιμότητας τότε είναι και διαχωρίσιμος ($e_2 \subseteq \mathfrak{S}$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $(E, \mathcal{T})$ είναι e_2 τότε $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ τπα βάση της $\mathcal{T}$

$(\forall \nu)\ x_\nu \in B_\nu$, $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ θδο D πυκνό εν E

Έστω $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$, $U = \bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda$, $I \subseteq \mathbb{N}$

$\forall \lambda_0 \in I: x_{\lambda_0} \in B_{\lambda_0} \subseteq U$

Άρα, $x_{\lambda_0} \in D \cap U \neq \emptyset$

Ορισμός: Ο τχ $(E, \mathcal{T})$ Lindelöf $\Leftrightarrow$ Καθε ανοιχτή κάλυψη του E έχει τπα υποκάλυψη

Πρόταση: Έστω τχ $(E, \mathcal{T})$ Lindelöf και διακριτός τότε E τπα

Έστω ότι E υπεραριθμήσιμο

και $e = \{\{x\} : x \in E\}$ ανοιχτή κάλυψη του E Α-ΤΟΠΟ

Θεώρημα (Lindelöf):

Έστω $(E, \mathcal{T})$ 2ης αριθμησιμότητας και $S \neq \emptyset$, $S \subseteq E$ τότε κάθε ανοιχτή κάλυψη του S έχει τπα υποκάλυψη

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\mathcal{C}$ ανοιχτή κάλυψη του S, δηλ. το $S \subseteq \cup \mathcal{C}$

$(\forall p \in S)(\exists G_p \in \mathcal{C})\ p \in G_p \xrightarrow[\mathcal{B} \text{ τπα βαση της } \mathcal{T}]{G_p \in \mathcal{T}} p \in B_p \subseteq G_p,\ B_p \in \mathcal{B}$

$\mathcal{B}^* = \{\underbrace{B_p \in \mathcal{B} \quad p \in S}_{\text{τ.π.α.}}\} \subseteq \mathcal{B}$ άρα $\nu \in \mathbb{N} \longrightarrow B_\nu \subseteq G_\nu$

$S \subseteq \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} B_\nu \subseteq \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} G_\nu$ Η συλλογή $G_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι τπα

υποκάλυψη της $\mathcal{C}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Έστω $(E, \mathcal{T})$ χώρος Lindelöf και $K \subseteq E$ K κλειστό τότε το K έχει την ιδιότητα Lindelöf

Απόδ

Ας είναι $\mathcal{T}$ μια $\mathcal{T}$-ανοικτή κάλυψη του K

τότε η συλλογή $\mathcal{C} \cup \{K^c\}$ είναι $\mathcal{T}$ ανοιχτή κάλυψη του E

Τότε, Υπάρχει το πολύ αριθμ. υποκάλυψη της $\mathcal{C} \cup \{K^c\}$ του E

Αυτή, έστω $\hat{\mathcal{C}} \cup \{K^c\}$ όπου $\hat{\mathcal{C}}$ τπα σύνολο της $\mathcal{C}$

Άρα, $K \subseteq \cup \hat{\mathcal{C}}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2:

Έστω $(E, \mathcal{T})$ είναι τχ 2ης αριθμησιμότητας και $\mathcal{B}$ τυχούσα βάση της $\mathcal{T}$, τότε υπάρχει τπα βάση $\mathcal{B}^*$ της $\mathcal{T}$ με $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$

Απόδ

Έστω $\mathcal{B}$ τυχούσα βαση της $\mathcal{T}$ και

$\mathcal{F} = \{G_\nu : \nu \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ τ.π.α. βάση της $\mathcal{T}$

τότε, $(\forall \nu \in I)\ G_\nu \in \mathcal{T} \xrightarrow{\mathcal{B} \text{ βαση}} G_\nu = \cup \mathcal{B}_\nu,\ \mathcal{B}_\nu \subseteq \mathcal{B}$

Έστω $\mathcal{B}_\nu$ ανοιχτή κάλυψη του $G_\nu \xRightarrow{\text{Προτ. 1}} \exists \mathcal{B}_\nu^*$ τ.πα υποκάλυψη της $\mathcal{B}_\nu$ για τη G_ν. Άρα, $\mathcal{B}^* = \bigcup_{\nu \in I} \mathcal{B}_\nu^*$ τπα $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$

Η $\mathcal{B}^*$ βάση της $\mathcal{T}$.

Εστω τυχον $A \in \mathcal{T} \xrightarrow{\exists \text{ βάση}} A = G_{\nu_1} \cup G_{\nu_2} \cup \dots \cup G_{\nu_k} \cup \dots$

$= (\underbrace{B_1^{\nu_1} \cup B_2^{\nu_2} \cup \dots}_{\subseteq \mathcal{B}_{\nu_1}^* \subseteq \mathcal{B}^*}) \cup (\underbrace{B_1^{\nu_2} \cup B_2^{\nu_2} \cup \dots}_{\subseteq \mathcal{B}_{\nu_2}^* \subseteq \mathcal{B}^*}) \cup \dots$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) Εστω $(E, \mathcal{T})$ με $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$ και εστω $p \in E$.
Να βρεθεί η θήκη $\overline{\{p\}}$.

ΛΥΣΗ

$\overline{\{p\}} = \cap \{ X \supseteq \{p\} : X \text{ κλειστο} \} = E$ και οντας τ.π.α.

Άρα $(E, \mathcal{T})$ διαχωρίσιμος είναι και $2^{ης}$ αριθμησιμότητας και $1^{ης}$ αριθμησιμότητας και Lindelöf.

2) Εστω $(E, \mathcal{T})$ $2^{ης}$ αριθμησιμότητας και $\Lambda \subseteq E$, Λ υπεραριθμήσιμος.
Νδο το Λ έχει ενα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης $p \in \Lambda$ (ως προς την $\mathcal{T}$)

ΛΥΣΗ

Εστω Λ δεν περιέχει σσ τότε

$(\forall p \in \Lambda)(\exists G_T \in \mathcal{T})\ a \in G_T$ αλλά $G \cap \Lambda = \{p\}$

$(E, \mathcal{T})$ $2^{ης}$ αριθμησιμότητας $\Rightarrow \exists \mathcal{B} = \{B_\nu : \nu \in I \subseteq \mathbb{N}\}$
βάση της $\mathcal{T}$. τότε

$(\forall p \in \Lambda)(\exists B_\nu \in \mathcal{B}) : p \in B_\nu \wedge B_\nu \cap \Lambda = \{p\}$

$p_1 \neq p_2$

$\left.\begin{array}{l} p_1 \to B_{p_1} \\ p_2 \to B_{p_2} \end{array}\right\}$ $B_{p_1} \neq B_{p_2}$ άρα η $f : p \to B_p$ 1-1

άρα $F : \underset{\text{υπεραριθ.}}{\Lambda} \xrightarrow{1-1} \mathcal{B}$ άτοπο τ.π.α.

σελ 279 Παραδείγματα θα παρουσιάσουν στο επόμενο μάθημα